

Das Lösen von linearen Gleichungssystem

Der Gauß'sche Algorithmus



Inhaltsverzeichnis

- Begriff „lineares Gleichungssystem“ (LGS)
- Anwendungsbezug
- Idee des Lösungsweges
- Schritte zur Lösung
- Die Umformungsmöglichkeiten
- Exemplarische Lösung eines 3,3-LGS
- Beispiel für **falsch** angewandte Umformungsmöglichkeiten
- Lösungsmenge eines Gleichungssystems
 - Schreibweisen
 - **Genau** eine Lösung
 - **Unendliche** viele Lösungen
 - **Keine** Lösung
- Die Matrizenschreibweise

Begriff „lineares Gleichungssystem“ (LGS)

- Beispiel: $3x+2y+6z = 4$
→ $3x_1+2x_2+4x_3 = 4$
- Variablen nur in erster Potenz
- m,n-System
 - $m \rightarrow$ Anzahl Gleichungen, $n \rightarrow$ Anzahl Variablen
- Schreibweise

I $a_{11}x_1 + \mathbf{a_{12}}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \rightarrow$ Faktor (Koeffizient)

II $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \mathbf{b_2} \rightarrow$ Konstante

Anwendungsbezug

- Rohstoffverteilung
- Populations-/ Bestands-/ Tierentwicklung
- Übergangswahrscheinlichkeiten
(Kaufverhalten, Planung)
- Codierung (Zahlen = Buchstaben)



Idee des Lösungsweges

- LGS in Stufenform lässt sich leicht lösen
$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 - x_3 & = & -1 \\ 6x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ -2x_3 & = & -36 \end{array}$$
- Erreichen der Stufenform durch Umformungen
 - Multiplikation
 - Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer anderen
- Mehrfaches Ausführen der Umformungen führt immer zur Stufenform
- Erreichen der Diagonalform
 - Gauß-Jordan-Algorithmus
- Lösung lässt sich direkt ablesen

Schritte zur Lösung

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 5x_1 + & x_2 - & x_3 = -3 \\ \text{II} & x_1 + & 3x_2 + & x_3 = 5 \\ \text{III} & x_1 - & 3x_2 - & x_3 = -1 \end{array}$$

➤ Schritt 1:

- Elimination von Variablen (außer in zugehöriger Gleichung) durch Additionsverfahren

➤ Schritt 2:

- Letzte Variable (hier x_3) soll nur noch einmal in der dritten Gleichung vorkommen

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = -1$$

→ Stufenform

$$6x_2 + 2x_3 = 6$$

➤ Schritt 3:

- Elimination der letzten Variable in allen Gleichungen außer der Zugehörigen durch Einsetzverfahren

$$-2x_3 = -36$$

➤ Schritt 4:

- Variablen sollen nur noch einmal vorkommen

→ Diagonalform

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -5 \\ x_3 & = & 18 \end{array}$$

Die Umformungsmöglichkeiten

- Umformungsmöglichkeiten:
 - Zwei Gleichungen vertauschen
 - Eine Gleichung mit einer Zahl ungleich null multiplizieren
 - Eine Gleichung durch die Summe oder Differenz eines Vielfachen von ihr und eines Vielfachen einer andere Gleichung ersetzen



Exemplarische Lösung eines 3,3- LGS

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 5x_1 + & x_2 - x_3 = -3 \text{ Tauschen} \\ \text{II} & x_1 + & 3x_2 + x_3 = 5 \text{ Von I und III} \\ \text{III} & x_1 - & 3x_2 - x_3 = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{III} & x_1 - & 3x_2 - x_3 = -1 \\ \text{II} & x_1 + & 3x_2 + x_3 = 5 \text{ II-III} \\ \text{I} & 5x_1 + & x_2 - x_3 = -3 \text{ I-5 III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{III} & x_1 - & 3x_2 - x_3 = -1 \\ \text{IIa} & & 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ \text{Ia} & & 14x_2 + 4x_3 = 2 \text{ 3Ia-7IIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{III} & x_1 - & 3x_2 - x_3 = -1 \\ \text{IIa} & & 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ \text{Ib} & & -2x_3 = -36 \text{ Ib}/(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{III} & x_1 - & 3x_2 - x_3 = -1 \text{ III+Ic} \\ \text{IIa} & & 6x_2 + 2x_3 = 6 \text{ IIa-2Ic} \\ \text{Ic} & & x_3 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{IIIa} & x_1 - & 3x_2 = 17 \\ \text{IIb} & & 6x_2 = -30 \text{ IIb}/2 \\ \text{Ic} & & x_3 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{IIIa} & x_1 - & 3x_2 = 17 \text{ IIIa+IIc} \\ \text{IIc} & & 3x_2 = -15 \\ \text{Ic} & & x_3 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{IIIb} & x_1 & = 2 \\ \text{IIc} & & 3x_2 = -15 \text{ IIc}/3 \\ \text{Ic} & & x_3 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{IIIb} & x_1 & = 2 \\ \text{IId} & & x_2 = -5 \\ \text{Ic} & & x_3 = 18 \end{array}$$